Bir Tesadüfi Değişkenin Varyansı:

Bir t.d. nin beklenen değeri, o.f. nin merkezi hakkında bilgi verir. Fakat ortalama değer, bir deneyden diğerine t.d. nin değerlerinin dağılımı, değişimi veya yayılımı ile ilgili bilgi vermez. Dağılım, değişim ve yayılma ölçütü olarak varyans kullanılır.

Tanım: X bir t.d. ve olasılık fonksiyonu $f(x)$ olsun. $E(X)=\mu$, X'in ortalaması olmak üzere X t.d. nin varyansı aşağıdaki gibi verilir.

$$V(x)=\sigma_x^2=E\left[(X-\mu)^2\right] \quad \ldots (19)$$

a.) X kesikli t.d. ise

$$\sigma_x^2=V(x)=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2\cdot f(x_i) \quad \ldots (20)$$

b.) X sürekli t.d. ise

$$\sigma_x^2=V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot f(x)\,dx$$

Yani X'in varyansı, kendi ortalamasından sapmasının karesinin ortalamasıdır.

Tanım: X ortalaması μ olan kesikli/sürekli bir t.d. olsun. X'in standart sapması (σ_x) varyansın kareköküdür.

$$\sigma_x=\sqrt{V(x)} \quad (21)$$

Varyansın özellikleri:

1. a bir sabit ve X t.d. olsun.

$$V(aX)=a^2\cdot V(x)$$

İspat: Tanımdan,

$$V(aX) = E\{[aX - E(aX)]^2\}$$
$$= E[a^2 \cdot (X - E(X))^2]$$
$$= a^2 \cdot E(X - E(X))^2$$
$$= a^2 \cdot V(X)$$

2. X bir t.d. ve b sabit ise

$$V(X+b) = V(X)$$

İspat:
$$V(X+b) = E\{[X+b - E(X+b)]^2\}$$
$$= E\{[X+b - E(X) - b]^2\}$$
$$= E[X - E(X)]^2$$
$$= V(X)$$

Teorem: X ve Y ortalamaları $E(X) = \mu_x$, $E(Y) = \mu_y$, varyansları $V(X) = \sigma_x^2$, $V(Y) = \sigma_y^2$ olan bağımsız t.d. ler olsun.

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \text{ dir.}$$

İspat: Tanımdan
$$V(X+Y) = E[\{(X+Y) - E(X+Y)\}^2]$$
$$= E\{[(X - E(X)) + (Y - E(Y))]^2\}$$
$$= E((X - E(X)))^2 + E((Y - E(Y)))^2$$
$$+ 2 \cdot E\{(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\}$$

Sağdaki ilk iki toplam $V(X)$ ve $V(Y)$ dir. 3. ncü toplam ise,

$$E(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y)) = E[XY - X \cdot \cancel{E(Y)} - \cancel{E(X)} \cdot Y + E(X) \cdot E(Y)]$$
$$= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0$$

bağımsız t.d. ler ise

$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ old. dan

$\Rightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ olur.

Tanım: X ve Y t.d. lerinin ortalamaları μ_X ve μ_Y olmak üzere

$E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$ beklenen değerine X ve Y arasındaki kovaryans denir ve

σ_{XY} yada $cov(X,Y)$ ile gösterilir.

$$cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X) \cdot E(Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

ile hesaplanır.

X ve Y istatistiksel olarak birbirinden bağımsız iseler $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ olacağından $cov(X,Y) = 0$ dır. Bunun tersi doğru değildir.

Tanım: X ve Y t.d. leri arasındaki ilişkinin derecesinin ve yönünün bir göstergesi olan "korelasyon katsayısı"

ρ_{XY} ile gösterilir ve

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ aralığında değişir. $|\rho_{XY}|$ sıfıra yakınsa zayıf, 1'e yakınsa kuvvetli ilişki vardır. ρ_{XY}'nin işaretine göre ters yada doğrusaldır.

74

UYGULAMALAR

1. Düzgün bir zar atılsın. Üste gelen yüzdeki noktaların sayısının beklenen değeri nedir?

Çözüm: Zarın üst yüzünde bulunan noktaların sayısı X t.d. ile gösterilsin. X'in olasılık fonksiyonu (o.f)

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)=p(X=x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\Rightarrow E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot f(x_i) = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+\cdots+6\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}=3{,}5 \text{ olur.}$$

2. Düzgün bir para üç kez atılsın. Bulunan Turaların sayısı için beklenen değer nedir?

Çözüm: Deney için örnek uzayı

Örnek nokta	Tura sayısı
TTT	3
TTY	2
TYT	2
YTT	2
TYY	1
YTY	1
YYT	1
YYY	0

X: Bulunan T sayısı olsun. X'in olasılık tablosu,

$X=x_i$	0	1	2	3
$f(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$\Rightarrow E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i\cdot f(x_i) = 0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

3. (2.) örneği yeniden düşünelim. Turaların sayısı X ve ilk iki atıştaki Turaların sayısı da Y t.d. olsun.

a.) $E(X)$, b.) $E(Y)$, c.) $E(X.Y)$, d.) X ve Y bağımsız mıdır?

Çözüm:

örnek	X	Y
TTT	3	2
TTY	2	2
TYT	2	1
YTT	2	1
TYY	1	1
YTY	1	1
YYT	1	0
YYY	0	0

X ve Y için ortak olasılık tablosu ise

x \ y	0	1	2	$P(X=x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	1/8	2/8	0	3/8
2	0	2/8	1/8	3/8
3	0	0	1/8	1/8
$P(Y=y)$	2/8	4/8	2/8	1

Böylece,

a.) $E(X) = \sum_{x=0}^{3} x_i \cdot f(x_i) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8}$

$= \frac{3}{2}$ //

b.) $E(Y) = \sum_{y=0}^{2} y_i \cdot f(y_i) = 0 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot \frac{4}{8} + 2 \cdot \frac{2}{8} = 1$ //

c.) $E(X.Y) = \sum_{x=0}^{3} \sum_{y=0}^{2} x_i y_j \cdot f(x_i, y_j)$

$= 0.0.(\frac{1}{8}) + 0.1.(0) + 0.2.(0) + 1.0.(\frac{1}{8}) + 1.1.(\frac{2}{8})$

$+ 1.2.(0) + 2.0.(0) + 2.1.(\frac{2}{8}) + 2.2.(\frac{1}{8})$

$+ 3.0.(0) + 3.1.(0) + 3.2.(\frac{1}{8}) = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} + \frac{4}{8} + \frac{6}{8}$

$= \frac{16}{8} = 2$ //

d.) X, Y'nin bağımsızlığı,

$E(X.Y) \stackrel{?}{=} E(X) . E(Y)$

$\Rightarrow 2 \neq \frac{3}{2} . 1.$

X ve Y bağımsız değildirler.